



**Hochschule
Kaiserslautern**
University of
Applied Sciences

Betriebswirtschaft
Zweibrücken

Wissenschaftliche Arbeitspapiere
Working Paper

**Schadenquotenbasierte
Bewertung der Rückversicherung**

- Gütekriterien für die
Summenexzedentenrückversicherung

Klaus J. Schröter

Fachbereich Betriebswirtschaft

Nr. 1
2019

Klaus J. Schröter

**Schadenquotenbasierte Bewertung der Rückversicherung
- Gütekriterien für die Summenexzedentenrückversicherung**

Zweibrücken: 2019

(Wissenschaftliches Arbeitspapier / Working Paper, 16 S.,
Hochschule Kaiserslautern, Fachbereich Betriebswirtschaft,
Nr. 1/2019)

Hrsg.: Prof. Dr. Christian Aichele

Prof. Dr. Michael Jacob

Prof. Dr. Marc Piazzolo

Prof. Dr. Walter Ruda

Nicht im Buchhandel erhältlich

Schutzgebühr: € 5,00

Bezug: Dekanat Fachbereich Betriebswirtschaft
Hochschule Kaiserslautern, Standort Zweibrücken
Amerikastr. 1
66482 Zweibrücken

WWW: <https://www.hs-kl.de/>

Zu dem Autor:

Prof. Dr. Klaus J. Schröter
Professor für Finanzdienstleistungen

Hochschule Kaiserslautern, Campus Zweibrücken (klaus.schroeter@hs-kl.de)

1. Einführung

Im Folgenden wird die Situation eines (Erst-)Versicherers betrachtet. Dieser trägt das Risiko, das mit dem Gesamtschaden

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

korrespondiert. N gibt die zufällige Anzahl der Schäden an und X_1, X_2, \dots sind die zufälligen Einzelschäden, wobei die Zufallsvariablen N, X_1, X_2, \dots stochastisch unabhängig und X_1, X_2, \dots darüber hinaus identisch verteilt sind.

Der Erstversicherer kalkuliert die zugehörige Gesamtprämie nach dem Prämienprinzip H_E , so dass er für die Übernahme des Risikos S die deterministische Prämie

$$p := H_E(S) = H_E(P^X, P^N)$$

einnimmt. Es ist hier (zunächst) nicht von Interesse, welches Prämienprinzip H_E der Versicherer verwendet. Dieses wird sich bei realistischen Betrachtungen als sehr komplex ergeben und sich unterschiedlich auf die einzelnen Risiken auswirken. In der Regel wird

$$p > E[S] =: \mu$$

gelten, nämlich genau dann, wenn das Prämienprinzip **erwartungswertüberschreitend** ist. Da H_E allerdings nicht weiter von Bedeutung ist, kann die Prämie p auch durch den **Sicherheitszuschlag**

$$\delta_E := \frac{p}{E[S]} \Leftrightarrow H_E(S) = p = (1 + \delta_E) \cdot E[S]$$

beschrieben werden. (Das heißt im Übrigen nicht, dass H_E dem Erwartungswertprinzip entspricht, denn der Parameter δ_E steht hier erst nach der Prämienkalkulation fest.)

Im Übrigen unterscheiden wir hier (vorläufig) nachfolgend nicht zwischen den Schäden S und den daraus abzuleitenden Entschädigungen, setzen diese also gleich bzw. gehen davon aus, dass die Versicherungsnehmer keine Selbstbehalte tragen. Formal wäre eine Erweiterung, die diese beiden Zufallsvariablen unterscheidet ohne größere Aufwände umsetzbar. Allerdings würde man bei einem Ansatz, der analog zu der hier im Fokus stehenden Rückversicherung modelliert wäre, den sehr wichtigen Aspekt unterschlagen, dass durch die Einführung von Selbstbehalten nicht nur die Schäden S von den Entschädigungen abweichen würden (nämlich größer wären), sondern auch, dass davon auszugehen wäre, dass die originäre Schadenverteilung S von den Selbstbehalten beeinflusst wäre. Diese Rückkopplungseffekte werden hier also ausgeblendet.

An Stelle des absoluten Gesamtschadens S im Bestand wird häufig die **Schadenquote**

$$Q := \frac{S}{p} = \frac{S}{(1 + \delta_E) \cdot E[S]}$$

betrachtet, engl. *loss ratio* oder seltener *claims ratio*.

Allerdings wird diese Schadenquote meist nach dem Vorliegen von Schadendaten a posteriori als Bestandskennzahl der deskriptiven Statistik bestimmt. Hier sehen wir die Schadenquote Q hingegen als Zufallsvariable. Folgerichtig definieren wir die **erwartete Schadenquote** (*expected loss ratio*) als den Erwartungswert

$$EQ = \frac{ES}{p} = \frac{\mu}{p} = \frac{1}{1 + \delta_E}.$$

Der Versicherer ist einerseits natürlich daran interessiert, dass die - in einer bestimmten Periode (in der Regel ein Geschäftsjahr) - sich durch den eingetretenen Gesamtschaden s realisierende Schadenquote

$$q := \frac{s}{p} = \frac{s}{(1 + \delta_E) \cdot \mu}$$

möglichst gering ist. Für das Risikomanagement und insbesondere die aus Risikokennzahlen abzuleitenden Maßnahmen ist aber der Fokus auf die erwartete Schadenquote μ zu richten, denn diese ist a priori (näherungsweise) bekannt. Im Kontext des Risikomanagements ist somit μ möglichst gering zu halten.

Während die beiden soeben formulierten Zielsetzungen die (Volumen-)Kennzahlen der realisierten bzw. erwarteten Schadenquoten und damit vornehmlich **Ertragsaspekte** betreffen, zielt die folgende Überlegung auf **Sicherheitsanforderungen**: Es liegt nämlich nahe, dass der Erstversicherer stark daran interessiert ist, dass die Schadenquoten im Zeitverlauf nicht allzu stark schwanken. Mit anderen Worten ist - neben dem Erwartungswert EQ - auch die Varianz oder die gleichwertig die **Standardabweichung der Schadenquote**

$$\sigma[Q] = \sqrt{\text{Var}[Q]} = \frac{\sigma[S]}{p}.$$

möglichst gering zu halten. (Von „minimieren“ sprechen wir hier vorerst nicht. Im Übrigen zeigt sich in diesem Kontext ein Vorzug der Betrachtung von relativen Kennzahlen wie Schadenquoten. Denn ohne den relativen Bezug zu den Prämien p würde sich das risikopolitische Optimum in Form der „Geschäftsaufgabe“ einstellen, da dann mit $S = 0$ sowohl der Schaden als auch die dessen Schwankung in 0 minimiert wird. Dieses „Optimum“ wäre aber ökonomisch abwegig.)

Korollar 1.1:

Der **Variationskoeffizient des Gesamtschadens** S ist die mit dem Sicherheitszuschlag gestreckte **Standardabweichung** der (zufälligen) Schadenquote Q :

$$v[S] := \frac{\sigma[S]}{E[S]} = (1 + \delta_E) \cdot \sigma[Q].$$

Beweis:

$$\begin{aligned} v[S] &= \frac{\sigma[S]}{E[S]} = \frac{(1 + \delta_E) \cdot \sigma[S]}{(1 + \delta_E) \cdot E[S]} \\ &= \frac{(1 + \delta_E) \cdot \sigma[S]}{p} = (1 + \delta_E) \cdot \sigma\left[\frac{S}{p}\right] = (1 + \delta_E) \cdot \sigma[Q] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Eine zentrale Maßnahme des Risikomanagements eines Erstversicherers ist die Rückversicherungsnahme, also die **passive Rückversicherung**. Ohne auf die Details der verschiedenen Rückversicherungsformen einzugehen, modellieren wir in einem ersten Ansatz, dass der Erstversicherer das übernommene S durch die **Risikoteilung** mit einem (oder mehreren) Rückversicherer in zwei Teile zerlegt. Die (ggf. kumulierten) an den/die

Rückversicherer **transferierten Teile** bilden die Zufallsvariable \tilde{S} . Entsprechend verbleibt bei dem Erstversicherer der **Selbstbehalt**

$$\tilde{S} := S - \hat{S}.$$

Vornehmliches Ziel der Rückversicherung ist es, die **Risikoposition** des Erstversicherers, etwa orientiert an dem **versicherungstechnischen Risiko**, zu reduzieren.¹ Zur Quantifizierung des versicherungstechnischen Risikos stehen diverse Kennzahlen zur Verfügung.² Während in vielen eher theoretischen Ansätzen der risikopolitisch geprägten Rückversicherung die **Ruintheorie** oder das Risikoverhalten in den rechten Rändern („**Flanken**“ oder engl. *tails*) der Gesamtschadenverteilung betrachtet wird³, beziehen sich unsere Überlegungen auf das **Schwankungsverhalten der Schadenquoten**. Ganz offensichtlich besteht ein Interesse des Erstversicherers daran, dass diese Schwankungen, etwa gemessen anhand der Standardabweichung der Schadenquoten, möglichst gering sind.

A priori ist vielleicht davon auszugehen, dass durch die passive Rückversicherung, die im Mittel etwas kosten wird, die Schadenquote nach Rückversicherung steigen wird, deren Schwankung aber sinken dürfte. Sowohl empirisch als auch theoretisch ist diese Vermutung aber zu widerlegen.

Für die formale Herleitung entsprechender Ergebnisse sind geeignete Größen einzuführen. Der **erwartete Selbstbehalt** (*expected retention*) des Erstversicherers ist offenbar

$$E[\tilde{S}] = E[S - \hat{S}] = E[S] - E[\hat{S}] = \mu - E[\hat{S}].$$

Alternativ bezeichnet man diesen Erwartungswert als **erwarteten Nettoschaden** oder **erwarteten Schaden für eigene Rechnung** („f. e. R.“), engl. *expected net loss*.

Der bzw. kumuliert die Rückversicherer erheben für den transferierten Teil \hat{S} des Originalrisikos S eine Gesamtprämie von

$$\hat{p} := H_R(\hat{S}) = H_R(P^{\hat{X}}, P^{\hat{N}}).$$

Beim Erstversicherer verbleibt somit eine **Nettoprämie** bzw. **Gesamtprämie f. e. R.** von

$$\tilde{p} := p - \hat{p}.$$

Die **Schadenquote nach Rückversicherung**, **Schadenquote f. e. R.** oder die **Nettoschadenquote** (engl. *net loss ratio*) ist somit

$$\tilde{Q} := \frac{\tilde{S}}{\tilde{p}} = \frac{S - \hat{S}}{p - \hat{p}}$$

Man könnte sich die Frage stellen, wie viel die Stabilisierung der Schadenquote (im Mittel) kostet. Diese Fragestellung unterstellt, dass die Rückversicherungsnahme im Mittel die Schadenquote f. e. R. erhöht. Das folgende Beispiel zeigt, dass das selbst für den Fall nicht stimmen muss, in dem die gezahlte RV-Prämie \hat{p} größer als die Leistungen \hat{S} des Rückversicherers sind.

¹ Vgl. etwa *Liebwein* (2018), S. 13 ff.

² Vgl. erneut *Liebwein* (2018), S. 36 ff., und etwa *Heilmann & Schröter* (2014), S. 185 ff., und *Cottin & Döhler* (2013), S. 109 ff.

³ Vgl. z.B. *Tan et al.* (2011), *Bernard & Tian* (2009), *Cai et al.* (2008), *Cai & Tan* (2007), *Schmidli* (2002), *Dickson & Waters* (1996).

Beispiel 1.2:

Der Gesamtschaden eines Erstversicherers in einem Geschäftsjahr beträgt $s = 80$ Mio. EUR. Die zugehörige Bruttoprämie liegt bei $p = 100$ Mio. EUR. Die (Brutto-)Schadenquote ist somit

$$q = \frac{s}{p} = \frac{80}{100} = \mathbf{80\%}$$

Der Erstversicherer hat für dieses (abgelaufene) Geschäftsjahr passive Rückversicherung betrieben. Dafür zahlt er (zu Beginn des Jahres) eine RV-Prämie von 11 Mio. EUR. Die (kumulierten) RV-Leistungen betragen 10 Mio. Es liegt also ein „Normalfall“ vor, in dem der Rückversicherer mehr Prämie bekam als er leisten musste. Dennoch ist die Schadenquote des Erstversicherers durch diese risikopolitische Maßnahme gesunken, und zwar auf die Netto-Schadenquote von

$$\tilde{q} = \frac{\tilde{s}}{\tilde{p}} = \frac{s - \hat{s}}{p - \hat{p}} = \frac{80 - 10}{100 - 11} = \frac{70}{89} = \mathbf{78,65\%}.$$

Selbstverständlich ließe sich dieses Beispiel auch auf die erwarteten Schadenquoten analog übertragen.

Analytisch lässt trivial klären, in genau welchen Fällen die (erwartete) Schadenquote durch Rückversicherungsnahme fällt bzw. steigt.

Bemerkung 1.3:

Die erwartete Schadenquote f. e. R. (des Erstversicherers) ist genau dann größer als die Brutto-Schadenquote (vor Rückversicherung), wenn die Schadenquote des Rückversicherers kleiner als die des Erstversicherers f. e. R. ist, d.h.:

$$E[Q] < E[\tilde{Q}] \Leftrightarrow E[\hat{Q}] := \frac{E[\hat{S}]}{\hat{p}} < E[Q].$$

Analog ist die realisierte Schadenquote f. e. R. \tilde{q} genau dann größer als die realisierte Brutto-Schadenquote q , wenn \tilde{q} kleiner als die realisierte Schadenquote \hat{q} des Rückversicherers ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} E[Q] < E[\tilde{Q}] \\ \Leftrightarrow \frac{E[S]}{p} < \frac{E[\tilde{S}]}{\tilde{p}} &= \frac{E[S] - E[\hat{S}]}{p - \hat{p}} \\ \Leftrightarrow (p - \hat{p}) \cdot E[S] < p \cdot (E[S] - E[\hat{S}]) \\ \Leftrightarrow p \cdot E[\hat{S}] < \hat{p} \cdot E[S] \\ \Leftrightarrow \frac{E[\hat{S}]}{\hat{p}} = E[\hat{Q}] < \frac{E[S]}{p} = E[Q] \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Dass man sich die Stabilität der Schadenquoten also keinesfalls stets durch höhere Schadenquoten f. e. R. „erkaufen“ muss, belegen auch empirische Schadenquoten deutscher Schadenversicherer aus den Jahren 2012 bis 2017. Die folgende Tabelle weist für fünf

ausgewählte Erstversicherungsunternehmen und den gesamten Markt die Brutto- und Netto-Schadenquoten aus.⁴

		2012	2013	2014	2015	2016	2017	Mittelwert	Standard- abweichung
SIGNAL IDUNA Allgemeine Versicherung AG	Q _{brutto}		75,0	62,2	66,9	67,3	65,7	67,42	4,69
	Q _{f.e.R.}		71,1	63,4	68,1	68,2	66,4	67,44	2,82
DEBEKA Allgemeine VVG	Q _{brutto}	54,1	55,3	55,3	53,9	54,4	60,0	55,50	2,43
	Q _{f.e.R.}	53,8	56,3	56,0	54,2	54,6	58,6	55,58	1,73
LVM VVG	Q _{brutto}	65,7	71,2	64,5	66,3	66,0		66,74	2,91
	Q _{f.e.R.}	66,8	67,6	64,5	67,2	66,6		66,54	1,38
HUK Coburg Allgemeine AG	Q _{brutto}		84,5	82,8	83,6	89,5	83,1	84,70	2,76
	Q _{f.e.R.}		81,7	81,1	84,3	88,9	83,6	83,92	3,08
IDEAL Sachversicherung AG	Q _{brutto}	45,3	49,0	53,1	79,9	73,1		60,08	15,05
	Q _{f.e.R.}	47,7	52,5	56,7	83,5	76,9		63,46	15,12
Markt	Q _{brutto}	68,5	75,4	67,6	69,6	68,2	67,6	69,48	3,30
	Q _{f.e.R.}	69,3	72,9	68,9	69,7	70,0	69,5	70,05	1,56

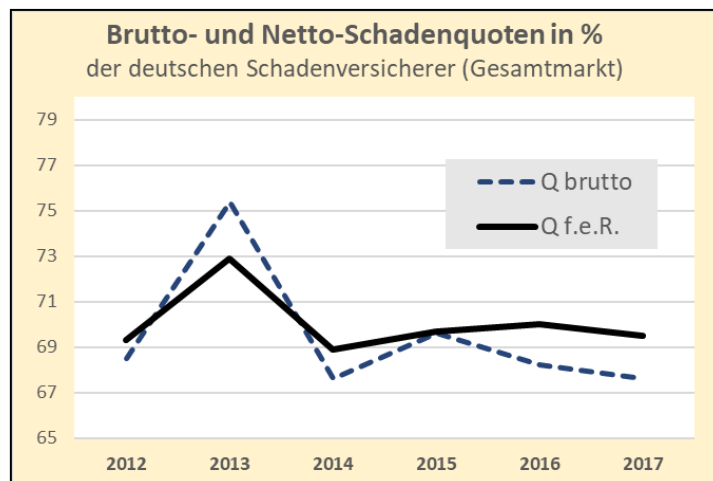


Abb. 1: Brutto- und Netto-Schadenquoten der deutschen Schadenversicherer 2012-2017

Offenbar zeigt sich hier empirisch kein klares Bild. Bei immerhin 2 der 5 Erstversicherer ist die Standardabweichung der Schadenquoten in den letzten 5 bzw. 6 Jahren durch Rückversicherung sogar gestiegen. Im gesamten Markt zeigt sich aber immerhin ca. eine Halbierung. Ganz sicher sind die Hintergründe dieser Zahlen sehr vielfältig. Die Geschäftsvolumina, die Prämienniveaus, strategisches Wettbewerbsverhalten etc. gehen hier prägend ein. Anliegen dieser Arbeit ist es, aus mathematisch-analytischer Perspektive die Veränderung der Schadenquote insbesondere bei der Summenexzedentenrückversicherung zu untersuchen.

Man darf aber nicht vergessen, dass für die Stabilität der Schadenquoten sehr wohl etwas „bezahlt“ wurde. Nur sollte man dies nicht allein durch die Betrachtung der Schadenquoten bemessen werden. Besser erscheint ein Ansatz, der den Rückgang der Schwankung der Schadenquote ins Verhältnis zum Anteil des abgegebenen Geschäfts setzt. Nach dem Motto „Wie viel % seines (direkten) Geschäfts muss ein Versicherer abgeben, um die Standardabweichung seiner Schadenquoten um etwa 1%-Punkt zu reduzieren?“. Dieser Frage soll nachgegangen und durch eine geeignete Kennzahl möglichst beantwortet werden.

⁴ S. Asskurata-Unternehmensrating der Debeka Allgemeine (2019), S. 7; der HUK-Coburg Allgemeine (2018), S. 7; der IDEAL Sachversicherung (2018), S. 6; der LVM (2018); S. 7 und der SIGNAL IDUNA (2018), S. 12.

Der **Anteil des abgegebenen „zedierten“ Geschäfts** kann a priori gut durch das Verhältnis

$$\frac{E[\hat{S}]}{E[S]} \in [0,1]$$

geschätzt werden. Im Kontext der Risikoteilung mit dem Versicherungsnehmer wird das Verhältnis des erwarteten beim Versicherungsnehmer verbleibenden Anteils des Risikos als **Entlastungskoeffizient** r oder **Entlastungseffekt** bezeichnet.⁵ Es ist also eine gewisse Aufmerksamkeit beim Umgang mit dem Begriff Entlastung geboten, da stets die Perspektive zu berücksichtigen ist. Als Gegenbegriff zum Entlastungskoeffizienten wird mitunter der sogenannte **Risikokoeffizient** eingeführt. Wir fñhrend die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\hat{r} := \frac{E[\hat{S}]}{E[S]} \in [0,1]$$

$$\tilde{r} := \frac{E[\tilde{S}]}{E[S]} = 1 - \hat{r} \in [0,1]$$

Offenbar wird der hier im Fokus stehende Erstversicherer um den Koeffizienten \hat{r} entlastet. Bei ihm verbleibt der erwartete Anteil $\tilde{r} = 1 - \hat{r}$.

Für die angestrebte Kennzahl wählen wir somit das Verhältnis

$$g := \frac{\text{Veränderung der Standardabweichung der Schadenquote}}{\text{Erwarteter Anteil des transferierten Geschäfts}}$$

$$= \frac{\sigma[Q] - \sigma[\tilde{Q}]}{\frac{E[\hat{S}]}{E[S]}} = \frac{\frac{v[S]}{1 + \delta_E} - \frac{v[\tilde{S}]}{1 + \tilde{\delta}}}{1 - \frac{E[\tilde{S}]}{E[S]}} = \frac{\Delta\sigma_Q}{1 - \tilde{r}} \quad (\text{mit } \tilde{\delta} := \tilde{p} - E[\tilde{S}])$$

und nennen es den **$\Delta\sigma$ -Index**.

Beispiel 1.4:

Ein Erstversicherer erwartet in seinem Bestand für ein Geschäftsjahr einen Gesamtschaden von 75 Mio. EUR bei einer Standardabweichung von 5 Mio. EUR. Die zugehörige Bruttoprämie liegt bei $p = 100$ Mio. EUR. Die erwartete (Brutto-)Schadenquote ist somit

$$E[Q] = \frac{E[S]}{p} = \frac{75}{100} = 75\%.$$

Zur Glättung des Verlaufs der Schadenquoten hat der Erstversicherer passive Rückversicherung betrieben. Die erwartete Schadenlast des Rückversicherers beträgt 11 Mio. EUR. Dafür hat der Erstversicherer eine RV-Prämie von 20 Mio. EUR zu zahlen. Die Standardabweichung nach Rückversicherung sinkt auf 3 Mio. EUR.

Die erwartete Schadenquote f. e. R. steigt somit bei dem Erstversicherer auf

$$E[\tilde{Q}] = \frac{E[\tilde{S}]}{\tilde{p}} = \frac{E[S] - E[\hat{S}]}{p - \hat{p}} = \frac{75 - 11}{100 - 20} = \frac{64}{80} = 80\%$$

⁵ Vgl. etwa Liebwein (2018), S. 247 f, und Goelden et al. (2016), S. 378 ff.

Der Erstversicherer „erkauft“ sich also die Kürzung der Schadenquoten um 2-%-Punkte durch eine um 5-%-Punkte höhere Schadenquote. (Allerdings hätte diese Schadenquote f. e. R. auch durchaus sinken können, vgl. Beispiel 1.2, und der hier betrachtete „relative Preis“ wäre negativ.) Der $\Delta\sigma$ -Index setzt hingegen diese Veränderung ins Verhältnis zum abgegebenen Geschäft:

$$g = \frac{\Delta\sigma_Q}{1 - \tilde{r}} = \frac{\sigma[Q] - \sigma[\tilde{Q}]}{\frac{E[\hat{S}]}{E[S]}} = \frac{5\% - 3\%}{\frac{11}{75}} = \frac{2\%}{14,6\%} = \mathbf{13,63\%}$$

Um die Standardabweichung der Schadenquoten von 5 % auf 3 % zu reduzieren, musste der Erstversicherer knapp ein Sechstel (14,6 %) seines direkten Geschäfts an den Rückversicherer weiterreichen.

Im Folgenden sollen Analysen mit den hier allgemein vorgestellten Kennzahlen konkret für die Summenexzedentenrückversicherung durchgeführt werden.

2. Summenexzedentenrückversicherung

Gegeben sei ein Versicherungsbestand mit n verschiedenen Risikotypen, die beschrieben seien durch die folgenden Größen:

- n_i Anzahl der Risiken vom Typ i
- VS_i Versicherungssumme des Risikotyps i
- μ_i Erwartungswert des Risikotyps i
- σ_i^2 Varianz des Risikotyps i , $i = 1, \dots, n$

(Auf die weitere Modellierung der Risiken Z_{ij} selbst, kann weitgehend und der Einfachheit halber verzichtet werden. Insbesondere gilt $E(Z_{ij}) = \mu_i > 0$, $Var(Z_{ij}) = \sigma_i^2 > 0$.)

Damit ist der **Gesamtschaden** (vor RV) gegeben durch

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij},$$

und es gilt im üblichen Falle der Unabhängigkeit aller Z_{ij}

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} E[Z_{ij}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \mu_i = \sum_{i=1}^n n_i \cdot \mu_i$$

$$Var[S] = Var\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} Z_{ij}\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} Var[Z_{ij}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n n_i \cdot \sigma_i^2$$

Betrachtet wird nun eine Summenexzedentenrückversicherung, kurz: **SumEx-RV, mit Selbstbehalt** $v_0 = v$. Zu untersuchen ist der **Variationskoeffizient** des Gesamtschadens im Selbstbehalt (nach RV), aufgefasst als Funktion in v . Dazu werden insbesondere die vom Risikotyp abhängigen Quoten

$$q_i = \frac{(VS_i - v)^+}{VS_i} = \begin{cases} 1 - \frac{v}{VS_i} & v \leq VS_i \\ 0 & v > VS_i \end{cases} = \text{Anteil des Rückversicherers bei Risikotyp } i$$

$$p_i = 1 - q_i = \frac{\min(VS_i, v)}{VS_i} = \begin{cases} \frac{v}{VS_i} & v \leq VS_i \\ 1 & v > VS_i \end{cases} = \dots \text{ des Erstversicherers bei Risikotyp } i$$

benötigt. Somit ist der **Gesamtschaden im Selbstbehalt**

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} p_i \cdot Z_{ij},$$

und die ersten beiden Momente lauten:

$$E[\tilde{S}] = E\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} p_i \cdot Z_{ij}\right] = \sum_{i=1}^n n_i \cdot p_i \cdot \mu_i = \sum_{i=1}^n n_i \cdot \frac{\min(VS_i, v)}{VS_i} \cdot \mu_i$$

$$Var[\tilde{S}] = Var\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} p_i \cdot Z_{ij}\right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} p_i^2 \cdot Var[Z_{ij}] = \sum_{i=1}^n n_i \cdot p_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

Der **quadierte Variationskoeffizient** ist somit

$$f(v) = \left(\text{VarKo}[\tilde{S}] \right)^2 = \frac{\text{Var}[\tilde{S}]}{\left(E[\tilde{S}] \right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n n_i \cdot p_i^2 \cdot \sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^n n_i \cdot p_i \cdot \mu_i \right)^2} \cdot 6$$

Um die etwaige Monotonie dieser Funktion (erwartet wird, dass f häufig monoton steigt, nach dem Motto „je mehr Selbstbehalt, desto mehr Originalrisiko, desto weniger Glättung durch Rückversicherung“) zu zeigen, wird ohne Einschränkung angenommen, dass

$$0 < VS_1 \leq VS_2 \leq \dots \leq VS_n$$

gilt. Durch diese Voraussetzung wird der Definitionsbereich von f in $n+1$ disjunkte Intervalle

$$I_k := [VS_{k-1}, VS_k) \quad , k = 1, \dots, n+1 \quad \text{mit } VS_0 := 0, VS_{n+1} := \infty$$

partitioniert.

Die Untersuchungen werden nun zunächst auf die Verläufe innerhalb der Intervalle konzentriert. Dafür sei also

$$v \in I_k = [VS_{k-1}, VS_k).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} E[\tilde{S}] &= \sum_{i=1}^n n_i \cdot \frac{\min(VS_i, v)}{VS_i} \cdot \mu_i = \sum_{i=1}^{k-1} n_i \cdot \frac{VS_i}{VS_i} \cdot \mu_i + \sum_{i=k}^n n_i \cdot \frac{v}{VS_i} \cdot \mu_i \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} n_i \cdot \mu_i}_{=: M_{k-1}} + v \cdot \underbrace{\sum_{i=k}^n \frac{n_i \cdot \mu_i}{VS_i}}_{=: \bar{M}_k} = \boxed{M_{k-1} + v \cdot \bar{M}_k} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{S}] &= \sum_{i=1}^n n_i \cdot \left(\frac{\min(VS_i, v)}{VS_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} n_i \cdot \left(\frac{VS_i}{VS_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2 + \sum_{i=k}^n n_i \cdot \left(\frac{v}{VS_i} \right)^2 \cdot \sigma_i^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} n_i \cdot \sigma_i^2}_{=: V_{k-1}} + v^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=k}^n \frac{n_i \cdot \sigma_i^2}{VS_i^2}}_{=: \bar{V}_k} = \boxed{V_{k-1} + v^2 \cdot \bar{V}_k} \end{aligned}$$

Der (quadierte) Variationskoeffizient in dem Intervall I_k ist somit die rationale Funktion

$$f(v) = \frac{\text{Var}[\tilde{S}]}{\left(E[\tilde{S}] \right)^2} = \frac{V_{k-1} + v^2 \cdot \bar{V}_k}{\left(M_{k-1} + v \cdot \bar{M}_k \right)^2} \quad , v \in [VS_{k-1}, VS_k).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass der Variationskoeffizient bzw. f auf dem Intervall $[0, \infty)$ stetig in dem Selbstbehalt v sind, während **Differenzierbarkeit** im Allgemeinen nur innerhalb der Intervalle I_k vorliegt, nicht aber in den Intervallrändern VS_k , was selbstverständlich Konsequenzen für die Bestimmung von Extremstellen hat.

⁶ Es erweist sich als mathematisch handlicher auf den quadrierten Variationskoeffizienten überzugehen. An der uns interessierenden etwaigen Monotonie ändert dies nichts, es entfallen aber die z.T. „lästigen“ Wurzeln.

Die **erste Ableitung** von f auf I_k ergibt

$$f'(v) = 2 \cdot \frac{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k \cdot v - \bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{(M_{k-1} + v \cdot \bar{M}_k)^3}.$$

Die **zweite Ableitung** ist

$$f''(v) = 2 \cdot \frac{M_{k-1}^2 \cdot \bar{V}_k + 3 \cdot \bar{M}_k^2 \cdot V_{k-1} - 2v \cdot (M_{k-1} \cdot \bar{M}_k \cdot \bar{V}_k)}{(M_{k-1} + v \cdot \bar{M}_k)^4}.$$

Wegen

$$M_{k-1} + v \cdot \bar{M}_k > 0$$

können die weiteren Betrachtungen weitgehend auf den Zähler konzentriert werden. Ein **stationärer Punkt** ist somit gegeben, wenn

$$f'(v) = 0 \Leftrightarrow M_{k-1} \cdot \bar{V}_k \cdot v = \bar{M}_k \cdot V_{k-1} \Leftrightarrow v = v_k^* := \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k}.$$

Zunächst ist offen, ob es solche stationären Punkte überhaupt geben kann, d.h. genauer, ob diese Punkte v_k^* in dem betrachteten Intervall $I_k = [VS_{k-1}, VS_k)$ enthalten sind, und es sogar lokale Minima oder Maxima sind. Wegen

$$f''(v_k^*) = 2 \cdot \frac{M_{k-1}^2 \cdot \bar{V}_k + \bar{M}_k^2 \cdot V_{k-1}}{(M_{k-1} + v_k^* \cdot \bar{M}_k)^4} > 0$$

können diese stationären Punkte, wenn sie überhaupt im Intervall liegen, **nur lokale Minima** sein. Die Monotonie (der Folge der Randpunktwerte) kann - ohne auf die mathematischen Details und Beweise einzugehen, und auch schon mit den obigen Überlegungen zu stationären Punkten - auf die Monotonie der Funktion f im Intervall $I_k = [VS_{k-1}, VS_k)$ zurückgeführt werden. Das folgende Lemma fasst die Erkenntnisse für den allgemeinen Fall zusammen.

Lemma 2.1:

Die VarKo-Funktion bzw. ihr Quadrat f ist auf den Intervallen $I_1 = [0, VS_1)$ und $I_{n+1} = [VS_n, \infty)$ konstant mit den Niveaus

$$\frac{\bar{V}_1}{(\bar{M}_1)^2} = const_1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{V_n}{(M_n)^2} = const_2$$

Die „inneren“ Intervalle I_2, \dots, I_n mit den Randpunkten VS_1, \dots, VS_n weisen die Randpunktwerte

$$\tilde{f}_k := f(VS_k) = \frac{V_k + VS_k^2 \cdot \bar{V}_{k+1}}{(M_k + VS_k \cdot \bar{M}_{k+1})^2}, \quad k = 1, \dots, n$$

auf. Für jedes Intervall $I_k = [VS_{k-1}, VS_k)$, $k = 1, \dots, n$, gibt es drei alternative Fälle:
Das Minimum von f auf I_k wird angenommen in

$$\tilde{v}_{\min}^k := \begin{cases} VS_{k-1} & \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k} \leq VS_{k-1} \\ v_k^* = \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k} & \text{falls } VS_{k-1} < \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k} < VS_k \\ VS_k & VS_k \leq \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k} \end{cases}, \quad k = 1, \dots, n$$

mit den Minimalwerten

$$\tilde{f}_{\min}^k := f(\tilde{v}_{\min}^k) := \begin{cases} \tilde{f}_{k-1} = \frac{V_{k-1} + VS_{k-1}^2 \cdot \bar{V}_k}{(M_{k-1} + VS_{k-1} \cdot \bar{M}_k)^2} & \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k} \leq VS_{k-1} \\ f(v_k^*) = \frac{V_{k-1} + (v_k^*)^2 \cdot \bar{V}_k}{(M_{k-1} + v_k^* \cdot \bar{M}_k)^2} & \text{falls } VS_{k-1} < \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k} < VS_k, k = 1, \dots, n \\ \tilde{f}_k = \frac{V_k + VS_k^2 \cdot \bar{V}_{k+1}}{(M_k + VS_k \cdot \bar{M}_{k+1})^2} & VS_k \leq \frac{\bar{M}_k \cdot V_{k-1}}{M_{k-1} \cdot \bar{V}_k} \end{cases}$$

Das **globale Minimum** von f wird somit in \tilde{v}_{\min}^m , $m \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\tilde{f}_{\min}^m := \min \{ \tilde{f}_{\min}^k : k = 1, \dots, n \}$$

angenommen.

Während das Lemma 2.1 die Gegebenheiten analytisch vollständig erfasst, die komplexen Gegebenheiten aber nur formal vermittelt, sollen abschließend einige Beispiele die Fülle der möglichen unterschiedlichen Sachverhalte illustrieren.

In dem ersten folgenden Beispiel werden $n = 2$ **Risiken** betrachtet. Die Funktion f ist hier zunächst konstant, dann rational, danach wieder konstant, sowie überall stetig. Lokale Extremwerte können nur im Intervall $[VS_1, VS_2)$ gegeben sein, und zwar als lokales Minimum.

Beispiel 2.2:

Gegeben seien die folgenden Parameter:

$$VS_1 = 50, VS_2 = 100, n_1 = 1, n_2 = 1, \mu_1 = 5, \mu_2 = 20, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 25$$

Hier hat die Varko2-Funktion f die Gestalt.

$$f(v) = \begin{cases} \frac{10^2/50^2 + 25^2/100^2}{(5/50 + 20/100)^2} = \frac{0,04 + 0,0625}{0,09} = 1,13\bar{8} = \text{const}_1 & v < 50 \\ \frac{10^2 + v^2 \cdot 25^2/100^2}{(5 + v \cdot 20/100)^2} = \frac{100 + 0,0625 \cdot v^2}{(5 + 0,2 \cdot v)^2} & 50 \leq v < 100 \\ \frac{10^2 + 25^2}{(5 + 20)^2} = \frac{100 + 625}{625} = 1,16 = \text{const}_2 & 100 \leq v \end{cases}$$

Diese Funktion hat ein **lokales Minimum** in dem stationären Punkt

$$v_2^* = \frac{\mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\mu_1 \cdot \sigma_2^2} \cdot VS_2 = \frac{20 \cdot 10^2}{5 \cdot 25^2} \cdot 100 = \frac{2000}{3125} \cdot 100 = 64 \in [50, 100)$$

Der Verlauf der VarKo-Funktion (Wurzel von f) ist grob steigend, weist aber zwischen 50 und 100 ein lokales Minimum auf:

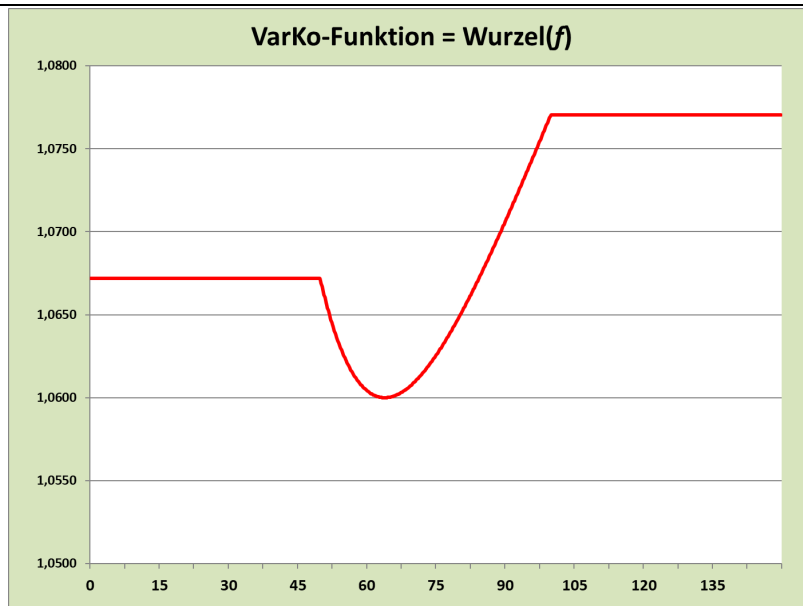


Abb. 2: Varko-Funktion mit einem lokalen Minimum, grob steigend

Das absolute Minimum liegt hier also im Punkt 64 und weist den Wert

$$\sqrt{f(64)} = \sqrt{\frac{100 + 0,0625 \cdot 64^2}{(5 + 0,2 \cdot 64)^2}} = \sqrt{\frac{356}{316,84}} = \sqrt{1,123...} = 1,059...$$

auf.

Bei dem folgenden Beispiel liegt ebenfalls ein lokales Minimum vor, aber die Funktion hat im Wesentlichen eher fallenden Charakter. Dabei wurde lediglich die Varianz des zweiten Risikos leicht reduziert.

Beispiel 2.3:

Gegeben seien die folgenden Parameter:

$$VS_1 = 50, VS_2 = 100, n_1 = 1, n_2 = 1, \mu_1 = 5, \mu_2 = 20, \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 22$$

Hier hat die Varko2-Funktion f die Gestalt.

$$f(v) = \begin{cases} \frac{10^2/50^2 + 22^2/100^2}{(5/50 + 20/100)^2} = \frac{0,04 + 0,0484}{0,09} = 0,98\bar{2} = \text{const}_1 & v < 50 \\ \frac{10^2 + v^2 \cdot 22^2/100^2}{(5 + v \cdot 20/100)^2} = \frac{100 + 0,0484 \cdot v^2}{(5 + 0,2 \cdot v)^2} & 50 \leq v < 100 \\ \frac{10^2 + 22^2}{(5 + 20)^2} = \frac{100 + 484}{625} = 0,934 = \text{const}_2 & 100 \leq v \end{cases}$$

Diese Funktion hat ein **lokales Minimum** in dem stationären Punkt

$$v_2^* = \frac{\mu_2 \cdot \sigma_1^2}{\mu_1 \cdot \sigma_2^2} \cdot VS_2 = \frac{20 \cdot 10^2}{5 \cdot 22^2} \cdot 100 = \frac{2000}{2420} \cdot 100 = 82,64... \in [50, 100)$$

mit dem **Minimalwert**

$$\sqrt{f(82,64...)} = \sqrt{\frac{100 + 0,0484 \cdot 82,64...^2}{(5 + 0,2 \cdot 82,64...)^2}} = \sqrt{\frac{430,57...}{463,49...}} = \sqrt{0,9289...} = 0,9638...$$

Der Verlauf der VarKo-Funktion (Wurzel von f) ist hier der folgende:

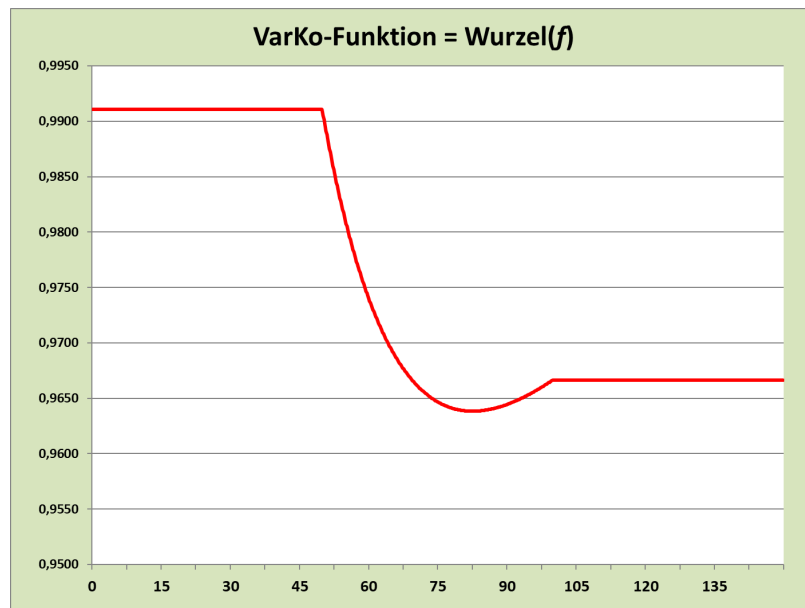


Abb. 3: Varko-Funktion mit einem lokalen Minimum, grob fallend

Welche Vielfalt der Verlauf der VarKo-Funktion zeigen kann, deutet das folgende Beispiel für $n = 7$ Risiken an.

Beispiel 2.4:

Gegeben seien neben $n = 7$ und $n_1 = n_2 = \dots n_7 = 1$ die folgenden Parameter:

$VS_1 = 50$, $VS_2 = 100$, $VS_3 = 150$, $VS_4 = 200$, $VS_5 = 250$, $VS_6 = 300$, $VS_7 = 500$

$\mu_i = 0,1 \cdot VS_i$ ($\lambda =$ erwarteter Schadensgrad = 10 %)

$\sigma_1 = 2,012$, $\sigma_2 = 3,837$, $\sigma_3 = 4,800$, $\sigma_4 = 7,450$, $\sigma_5 = 8,859$, $\sigma_6 = 7,890$, $\sigma_7 = 12,726$

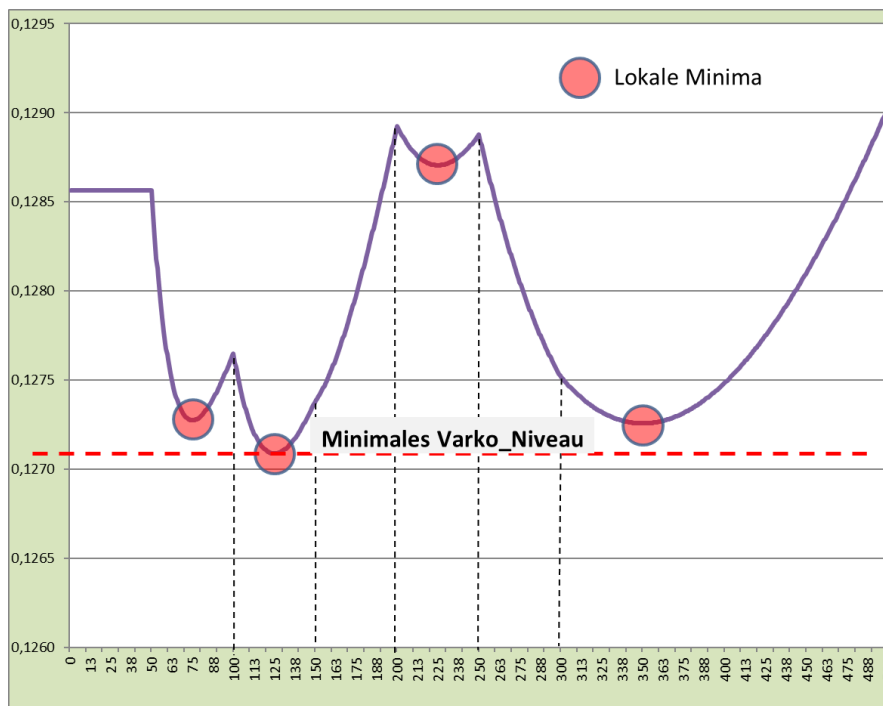


Abb. 4: Varko-Funktion mit vier lokalen Minima, grob steigend

Hier wurde ein Fall konstruiert, in dem zunächst zwei lokale Minima in der Mitte der Intervalle $[50,100)$ und $[100,150)$ vorliegen. Dann steigt die Funktion streng monoton

(pseudo-stationärer Punkt 140 links vom linken Randpunkt in $[150,200)$), dann folgt wiederum ein mittiges lokales Minimum 225 in $[200,250)$, dann fällt die Funktion streng monoton (pseudo-stationärer Punkt 350 rechts vom rechten Randpunkt in $[250,300)$), danach hat sie ein weiteres lokales Minimum in 350 im Intervall $[300,500)$, ehe sie ab 500 das finale Plateau erreicht.

Die analytische Auswertung des Variationskoeffizienten des Selbstbehalts gemäß Lemma 2.1 führt auf die folgende Tabelle:

v^*_k	\tilde{v}^k_{\min}	fs^k_{\min}
	0	0,12857
75	75	0,12727
125	125	0,12709
140	150	0,12738
225	225	0,12871
350	300	0,12752
350	350	0,12726

Das absolute Minimum liegt also im Punkt 125 und weist den Wert **0,12709** auf, was die Grafik natürlich grob bestätigt.

Literaturhinweise

- [1] **Bernard, C., Tian, W.:** *Optimal reinsurance arrangements under tail risk measures.* The Journal of Risk and Insurance 76 (3), 709-725, 2009.
- [2] **Cai, J., Tan, K.S.:** *Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures.* Astin Bulletin 37 (1), 93-112, 2007.
- [3] **Cai, J., Tan, K.S., Weng, C., Zhang Y.:** *Optimal reinsurance under VaR and CTE risk measures.* Insurance: Mathematics and Economics 43 (1), 185-196, 2008.
- [4] **Cottin, C., Döhler, S.:** *Risikoanalyse – Modellierung, Beurteilung und Management von Risiken mit Praxisbeispielen.* 2. Auflage, Springer, 2013.
- [5] **Dickson, D.C.M., Waters, H.R.:** *Reinsurance and ruin.* Insurance: Mathematics & Economics 19, 61-80, 1996.
- [6] **Goelden, H.-W., Hess, K., Morlock, M., Schmidt, K., Schröter, K.:** *Schadenversicherungsmathematik.* Springer, 2016.
- [7] **Heilmann, W.-R., Schröter, K.:** *Grundbegriffe der Risikothorie.* 2. Auflage, VVW, 2013.
- [8] **Liebwein, P.:** *Klassische und moderne Formen der Rückversicherung,* 3. Auflage, VVW, 2018.
- [9] **Schmidli, H.:** *On minimising the ruin probability by investment and reinsurance.* Annals of Applied Probability 12, 890-907, 2002.
- [10] **Tan, K.S., Weng, C., Zhang Y.:** *Optimality of general reinsurance contracts under CTE risk measure.* Insurance: Mathematics and Economics 49 (2), 175-187, 2011.

Weblinks

- [1] **Assekurata-Unternehmensrating** der **Debeka Allgemeine Versicherung** (2019),
<https://www.assekurata.de/ratings/rating/debeka-allgemeine-versicherung-ag-2706/>
- [2] **Assekurata-Unternehmensrating** der **HUK-Coburg-Allgemeine Versicherung** (2018),
https://www.assekurata.de/fileadmin/mediendatenbank/Dokumente/Ratings%20-%20Schaden%20Unfall/2018/HUK_Allgemeine/Ratingbericht_HCA_2018.pdf
- [3] **Assekurata-Unternehmensrating** der **IDEAL Versicherung** (2018),
https://www.assekurata.de/fileadmin/mediendatenbank/Dokumente/Ratings%20-%20Schaden%20Unfall/2018/Ideal/Ratingbericht_Ideal_Sach_2018.pdf
- [4] **Assekurata-Unternehmensrating** der **LVM a.G.** (2018),
https://www.assekurata.de/fileadmin/mediendatenbank/Dokumente/Ratings%20-%20Schaden%20Unfall/2018/LVM/Ratingbericht_LVM_2018.pdf
- [5] **Assekurata-Unternehmensrating** der **SIGNAL IDUNA Versicherung AG** (2018),
https://www.assekurata.de/fileadmin/mediendatenbank/Dokumente/Bonit%C3%A4tsratings/SHUK/2018/IDUNA_Allgemeine/B-Ratingbericht_SIGNAL_IDUNA_Allgemeine_2018.pdf